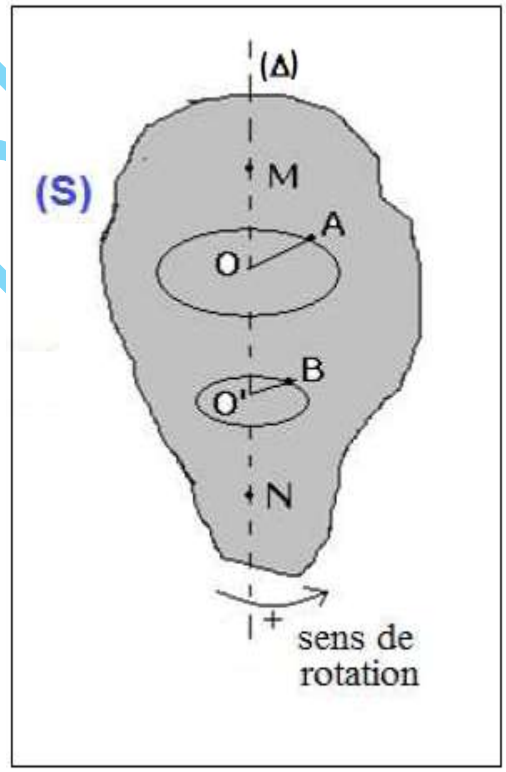
Rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe

I- Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

1-Exemple :

On considère un solide (S) en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ).

- Les deux point A et B décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe (Δ).
- Les deux point M et N situés sur l'axe (Δ) sont immobiles.



2- Définition :

Un solide possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) si :

Tous les points du solide décrivent des trajectoires circulaires centrées sur l'axe de rotation, sauf les points qui appartiennent à cet axe.

II- Repérage d'un point du solide :

Soit M un point quelconque choisi sur la trajectoire circulaire. On oriente la trajectoire dans un sens arbitraire. La position du point M est repéré par :

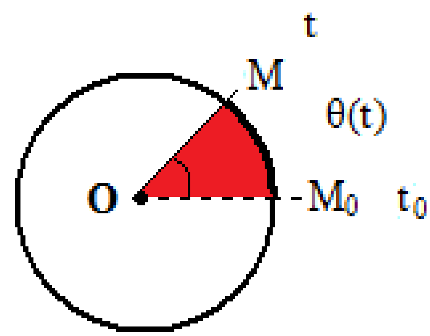
1- Abscisse angulaire :

On appelle abscisse angulaire du point M à un instant t la valeur algébrique de l'angle :

$$\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$$

L'unité de mesure de l'abscisse angulaire est le radian (rad).

abscisse angulaire (rad) → $\boxed{\theta = 2\pi \times n}$ ← nombre de tours



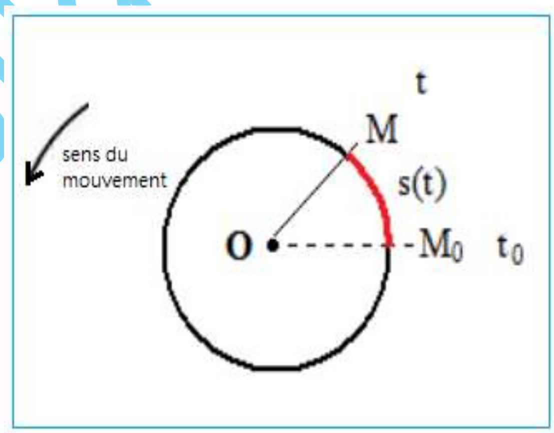
2- abscisse curviligne :

On appelle abscisse curviligne du point mobile M à un instant t la valeur algébrique de l'arc :

$$s = \widehat{M_0M}$$

L'unité de mesure de l'abscisse curviligne est le mètre (m).

S est une grandeur algébrique sa signe dépend de l'orientation de la trajectoire.



3- La relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire :

L'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire sont proportionnelles :

abscisse curviligne (m) → $\boxed{s(t) = R.\theta(t)}$ ← abscisse angulaire (rad)

↑ rayon (m)

III- Vitesse d'un solide en rotation :

1- Vitesse angulaire

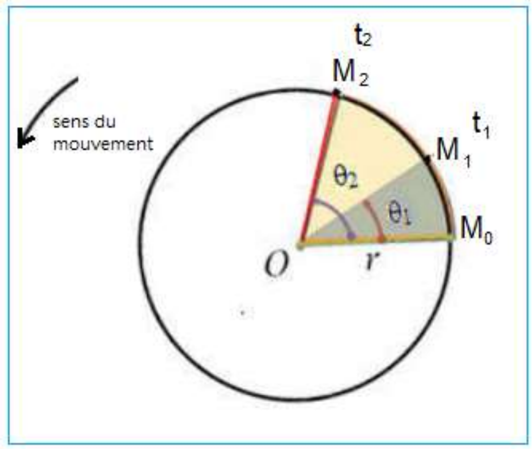
1.1- Vitesse angulaire moyenne

Lorsqu'on un corps est en mouvement autour d'un axe fixe (Δ). Le point M occupe la position M_1 à l'instant t_1 et la position M_2 à l'instant t_2, les deux positions étant repérées par des abscisses angulaires θ_1 et θ_2.

Définition :

La vitesse angulaire moyenne ω_m du point M entre t_1 et t_2 est donnée par la relation suivante :

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$



$\Delta\theta$ est l'angle de rotation du solide pendant la durée Δt.

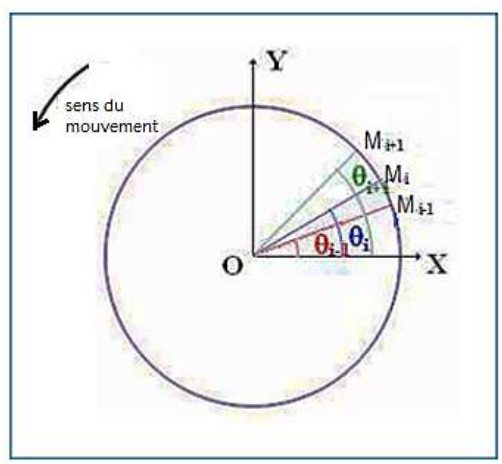
Unité de la vitesse angulaire dans (S I) est le radian par seconde, noté rad/s.

2- La vitesse angulaire instantanée :

En considérant t_{i-1} et t_{i+1} deux instants très proches et qui encadrent l'instant t_i.

La vitesse angulaire instantanée à l'instant t_i est la vitesse angulaire moyenne entre les instants t_{i+1} et t_{i-1} .

$$\omega_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$



3- Relation entre vitesse linéaire et vitesse angulaire :

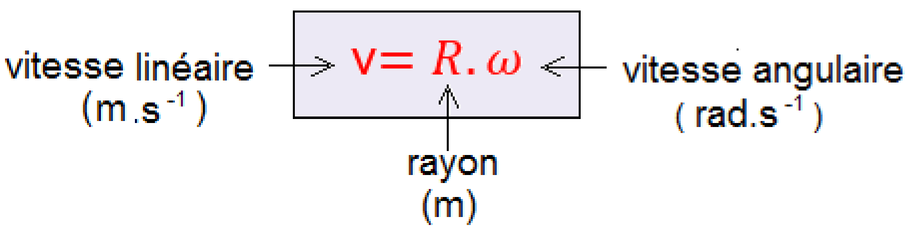
Vitesse linéaire d'un point du solide

Pendant la durée $\Delta t = t_2 - t_1$; le point M parcourt la distance $\widehat{M_1M_2}$ la vitesse linéaire s'écrit :

$$v = \frac{\widehat{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

On sait que : $\Delta s = R.\Delta\theta$

Donc : $v = R.\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$



Remarque :

Tous les points du solide ont à chaque instant la même vitesse de rotation, mais ils n'ont pas généralement la même vitesse instantanée.

IV- Mouvement de rotation uniforme

1- Définition :

Le mouvement de rotation d'un solide est dite uniforme si sa vitesse angulaire ω reste constante au cours du temps.

2- Les propriétés de rotation uniforme

2.1- La période :

La période T d'un mouvement de rotation uniforme est la durée d'un tour.

On : $\Delta\theta = \omega.\Delta t$ pour un tour $2\pi = \omega.T$

période (s) → $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$ ← vitesse angulaire (rad.s^{-1})

avec T en seconde (s) et ω en radian par seconde (rad/s).

2.2- la fréquence :

La fréquence f d'un mouvement de rotation uniforme est le nombre de tours par seconde.

fréquence (Hz) → $$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$$ ← vitesse angulaire (rad.s^{-1})

Remarque :

La vitesse angulaire ω peut être exprimée en $tr.s^{-1}$ ou $tr.min^{-1}$

avec :

$$\begin{cases} 1tr.min^{-1} = \dfrac{2\pi}{60} rad.s^{-1} \\ tr.s^{-1} = 2\pi.s^{-1} \end{cases}$$

V- Equation horaire d'un mouvement de rotation uniforme

θ et θ_0 sont des abscisse angulaires, d'un point M du solide, successivement aux instants t et t_0.

On écrit : $$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}$$

$$\theta = \omega.(t - t_0) + \theta_0$$

Si $t_0 = 0$ on a : $\theta = \omega.t + \theta_0$

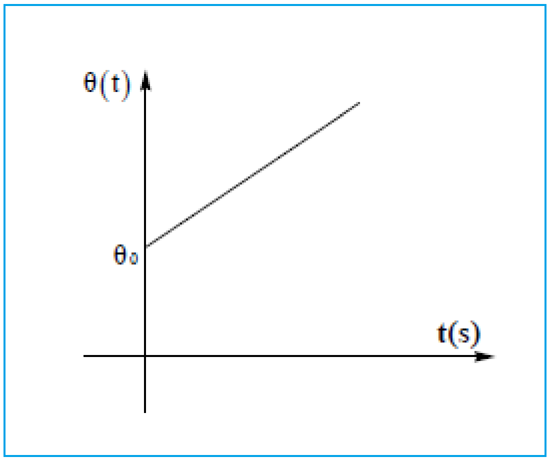
Activité : (voir fin du cour)

L’équation horaire d’un mouvement de rotation uniforme en abscisse angulaire :

abscisse angulaire à t=0 (rad)

abscisse angulaire à l'instant t (rad) → $\boxed{\theta(t) = \omega . t + \theta_0}$

vitesse angulaire ($rad.s^{-1}$)



L’équation horaire d’un mouvement de rotation uniforme en abscisse curviligne $s(t)$:

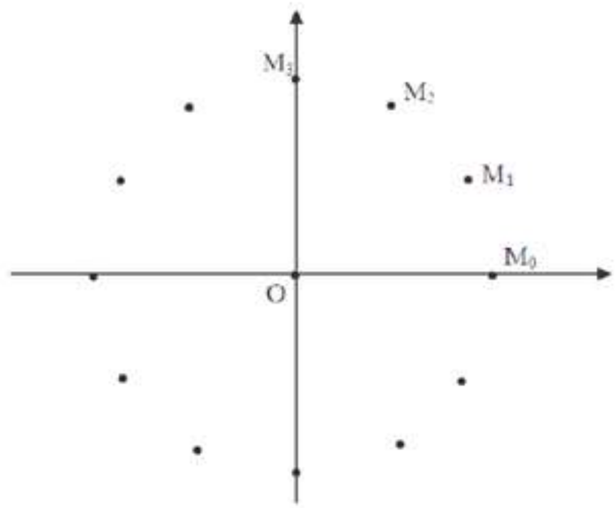
abscisse curviligne à t=0 (m)

abscisse curviligne à l'instant t (m) → $\boxed{s(t) = \mathrm{v}.t + s_0}$

vitesse linéaire ($m.s^{-1}$)

Activité :

La figure suivante représente l'enregistrement de mouvement d'un point M située au centre d'un autoporteur en rotation autour d'un axe fixe. (L'autoporteur est lié par un fil à un axe métallique fixé sur une table horizontale). L'intervalle de temps entre deux enregistrements consécutifs est égal à 40 ms.



On considère l'axe Ox passant par M_0 comme direction référentielle. Les position du point M sont déterminées par l'abscisse angulaire $\theta_i = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_i})$ ou bien par l'abscisse curviligne $S = (\widehat{M_0M_i})$. Le moment d'enregistrement de point M_2 correspond à l'origine des temps.

1) Montrer que le mouvement de M est circulaire uniforme.

2) Compléter le tableau suivant :

	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}
Θ (rad)	0											
S (m)	0											
t(s)			0									

3) En utilisant une échelle convenable, tracer les deux courbes θ=f(t) et s=f(t).

4) En déduire les équations horaires du mouvement de point M.

5) Déterminer la vitesse angulaire de rotation de l'autoporteur et la vitesse de translation du point M graphiquement et par le calcule.

6) Vérifier la relation $v = r.\omega$, tel que v est la vitesse de translation, ω la vitesse angulaire et r le rayon de la trajectoire.

Exploitation:

1- Montrons que le mouvement est circulaire et uniforme :

La trajectoire du point M est circulaire, la distance entre deux points consécutifs reste constante donc **le mouvement est circulaire uniforme.**

2- Complétons le tableau :

On prend comme exemple l'abscisse curviligne en position M_2 :

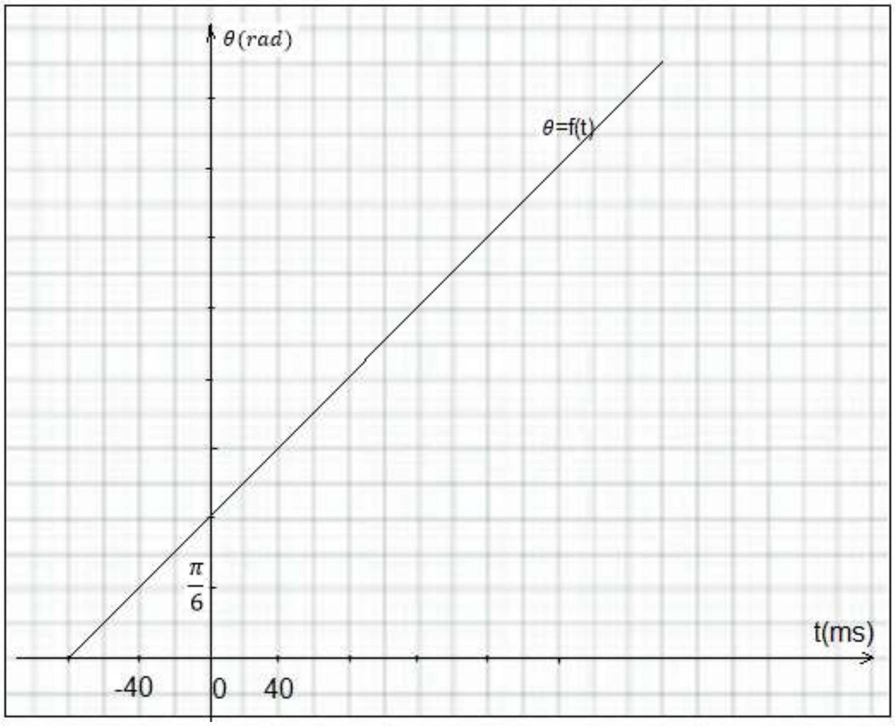
$$s_2 = \widehat{M_0M_2} = r(\theta_2 - \theta_0)$$

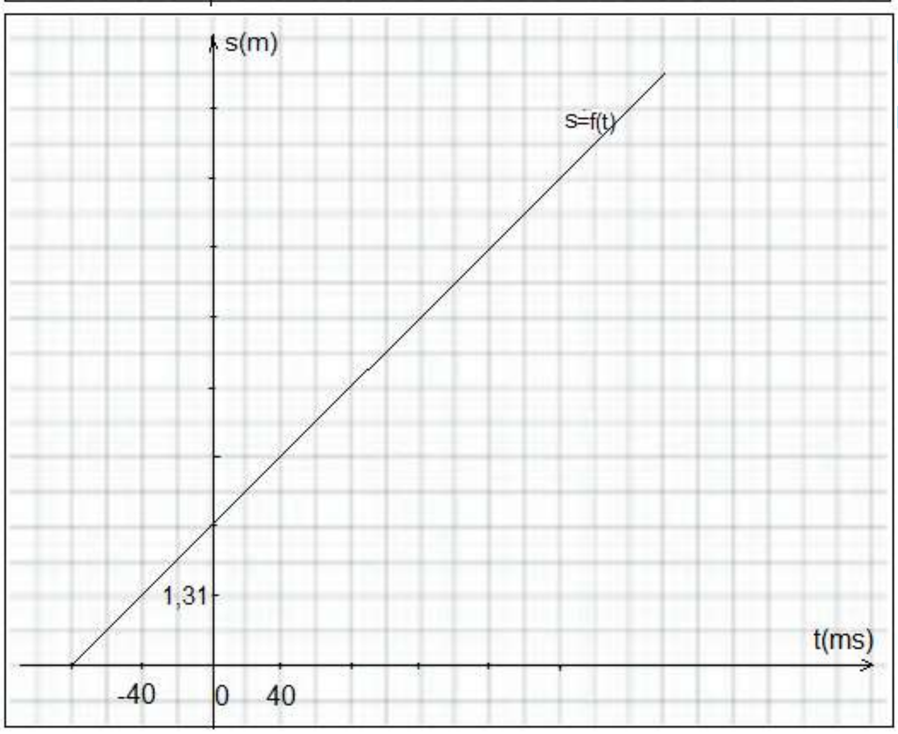
r rayon de la trajectoire

$$s_3 = 2{,}5 \times \left(\frac{\pi}{3} - 0\right) = 1{,}62\ cm$$

Position	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}
$t(ms)$	-80	-40	0	40	80	120	160	200	240	280	320	360
$\theta(rad)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$s(cm)$	0	$1{,}31$	$2{,}62$	$3{,}93$	$5{,}24$	$6{,}54$	$7{,}85$	$9{,}16$	$10{,}47$	$11{,}78$	$13{,}09$	$14{,}40$

3- Les courbes $\theta = f(t)$ et $s = f(t)$





4- Les équations horaires du mouvement :

La courbe $\theta = f(t)$ est une fonction affine son équation s'écrit :

$$\boldsymbol{\theta = \omega t + \theta_0}$$

A t=0 on a : $\begin{cases} \theta(t=0) = \theta_0 \\ \theta(t=0) = \frac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{\theta_0 = \frac{\pi}{3}}$

ω représente le coefficient directeur :

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_6 - \theta_3}{t_6 - t_3} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{(160 - 40) \times 10^{-3}} = 13,09\ rad.s^{-1}}$$

L'équation horaire s'écrit : $\boldsymbol{\theta = 13,09\, t + \frac{\pi}{3}}$

De la même façon on obtient l'équation horaire : $s =$ V$. t + s_0$

$$\text{V} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_6 - s_3}{t_6 - t_3} = \frac{(7,85 - 3,93) \times 10^{-2}}{(160 - 40) \times 10^{3}} = 0,33 m.s^{-1}$$

$$s_0 = R\theta_0 = 2,5 \times 10^{-2} \times \frac{\pi}{3} = 2,62.10^{-2} m$$

$$s = 0,33\, t + 2,62.10^{-2}$$

5- graphiquement :

la vitesse angulaire est le coefficient directeur du graphe $= f(t)$, donc :

$$\omega = 13,10\, rad.s^{-1}$$

la vitesse linéaire est le coefficient directeur du graphe $= f(t)$, donc :

$$\text{V} = 0,33\, m.s^{-1}$$

-Par calcul :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_0}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{([0 - (-80)] \times 10^{3}} = 13,09\, rad.s^{-1}$$

$$\text{V} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_0}{t_2 - t_0} = \frac{(2,62 - 0) \times 10^{-2}}{[0 - (-80)] \times 10^{3}} = 0,33 m.s^{-1}$$

6- Vérification de la relation V$= R.\omega$:

V$= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R.\Delta\theta}{\Delta t} = R.\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ donc : V$= R.\omega$

$$R.\omega = 2,5 \times 10^{-2} \times 13,09 = 0,33\, m.s^{-1}$$

Donc la relation V$= R.\omega$ est vérifiée.

Exercice N°1 :

Un disque de diamètre $D = 10\ cm$ tourne à $300\ tours/min$, autour d'un axe passant par son centre d'inertie.

1- Calculer la fréquence du mouvement.

2- Déduire la vitesse angulaire ω de rotation du disque.

3- Calculer la vitesse de deux points du disque, le premier situé à une distance $d_1 = 4{,}5\ cm$ et le deuxième à une distance à une distance $r_2 = 8{,}5\ cm$ de l'axe de rotation. Déduire.

Exercice N°2 :

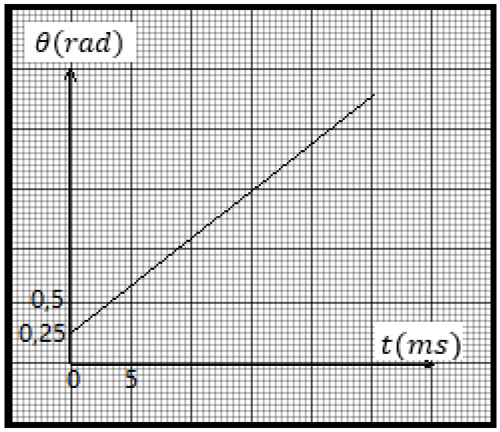
1- Calculer ω_s la vitesse angulaire de l'aiguille des secondes d'une montre.

2- Calculer N_m la fréquence de l'aiguille des minutes d'une montre.

3- calculer V la vitesse linéaire de l'extrémité de l'aiguille des heures de cette montre en m/min on donne la distance qui sépare l'extrémité du centre de rotation est de $2cm$.

Exercice N°3

Le document ci-dessous représente la variation de l'abscisse angulaire θ en fonction du temps d'un point M d'un disque en rotation autour de son axe de symétrie Δ.



1. Ecrire l'équation horaire du mouvement du point M. En déduire la vitesse angulaire du disque.

2. Déterminer la période et la fréquence du mouvement.

3. trouver l'expression de l'abscisse curviligne du point M en fonction du temps sachant qu'il se trouve à une distance $d = 10\ cm$ de l'axe Δ.

4. Calculer la vitesse linéaire du point M.

5- Déterminer l'abscisse angulaire et l'abscisse curviligne du point M à l'instant $t = 5s$.

Exercice 4 :

Deux satellites S_1 et S_2 tournent dans le même sens autour de la terre sur deux orbites circulaires, coplanaires et concentriques. Le centre commun des deux orbites et le centre O de la terre (doc 1).

Les vitesses angulaires constantes des deux satellites supposées ponctuelles sont $\omega_1 = 9.10^{-4}\ rad.s^{-1}$ et $\omega_2 = 8.10^{-4}\ rad.s^{-1}$

On choisit l'origine du temps $(t = 0)$ l'instant où les satellites sont portés par le même rayon de la terre (doc 2).

1- Au bout de quelle durée T, seront-ils à nouveau « côte à côte » ?

2- Déduire que le phénomène est périodique et calculer sa période.